nederlands tijdschrift voor

Natuurkunde

december 2007 - jaargang 73 - nummer 12

Tijdvereffening
Nobelprijs natuurkunde 2007
Nobelprijs chemie 2007

Tijdvereffening: het verschil tussen zonnetijd en middelbare tijd

"De zon staat om 12 uur in het zuiden". Dit zei men toen wij nog de 'Amsterdamsche Tijd' hadden, die tot 1937 19m 32s verschilde met die van Greenwich. Van 1937 tot 1940 werd het verschil met Greenwich precies 20m. Maar zelfs in de middelbare tijd is deze uitspraak maar vier dagen per jaar waar, ten opzichte van de kloktijd klopt de uitspraak in ons land nooit. Wij hebben sinds 1940 de Midden-Europese Tijd, die in Nederland in het winterhalfjaar gemiddeld 40 minuten voor loopt op de zon. Wanneer de zon in het zuiden staat is het 12 uur zonnetijd. De eerstvolgende keer dat de zon weer in het zuiden staat, is er een zonnedag verstreken. Deze zonnedag heeft niet het hele jaar door een gelijke lengte. Daarom is er de middelbare tijd ingevoerd zodat elk etmaal even lang duurt. Hierop is de kloktijd gebaseerd. De tijdvereffening, die maximaal een kwartier bedraagt, is het verschil tussen deze zonnetijd en de middelbare tijd. Dit artikel wil inzicht geven in de tijdvereffening en wil aantonen dat simpele berekeningen een nauwkeurigheid hebben van twee seconden. *Han Hoogenraad en Alexander Vermeulen*


j.p.c.hoogenraad@planet.nl

Han Hoogenraad studeerde in 1961 in Delft af als natuurkundig ingenieur, en was daarna leraar natuurkunde bij het VWO en het HBO.

alexandervermeulen@versatel.nl

Alexander Vermeulen studeerde in 1965 af, ook als natuurkundig ingenieur, en werkte daarna bij Delft Instruments onder andere aan optische interferentielagen.

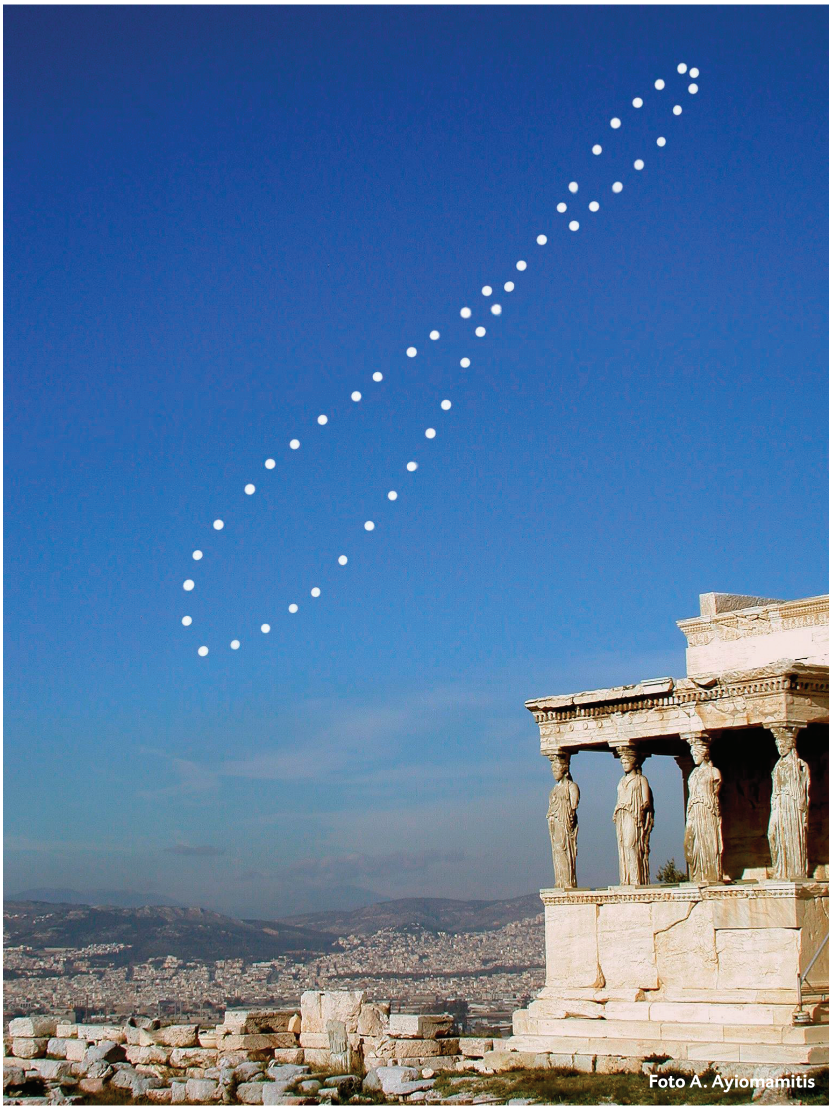
De tijdvereffening is weer te geven als het zogenaamde 'analemma' van figuur 1. De tijdvereffening is er de oorzaak van dat de vroegste zonsondergang en de laatste zonsopkomst niet beide plaats vinden tijdens het wintersolstitium rond 21 december, de kortste dag. De vroegste zonsondergang vindt plaats rondom 10 december op onze breedtegraad. Rond het zomersolstitium doet zich een dergelijk verschijnsel ook voor. Het datumverschil neemt bovendien sterk toe met afnemende breedtegraad [1].

Ptolemaeus maakte in zijn *Almagest* (circa 150 n.C.) al melding van de tijdvereffening [2]. Dit geeft blijk van een eerbiedwaardige waarnemingsnauwkeurigheid in een tijd van zandlopers. Christiaan Huygens [3] gebruikte in 1665 een grafische methode om de tijdvereffening redelijk nauwkeurig te berekenen. Hij was hiermee wellicht de eerste.

Pas in de negentiende eeuw werd de Middelbare Tijd officieel ingevoerd. Maar de klok op de kerktoren bleef in de praktijk vaak maatgevend, en die werd nog tot ver in de negentiende eeuw gecorrigeerd aan de hand van de zonnewijzer, die voor dat doel op veel torens aanwezig was. Ook voor een juiste aflezing van een zonnewijzer is een correctie voor de tijdvereffening nodig. De laatste 'dienstzonnewijzer' verdween pas van de stations van de Franse spoorwegen rond 1860 [4]. De tijdvereffening was van groot belang voor navigatie op zee, tot de komst van het GPS-systeem.

Oorzaken

Een eerste oorzaak is de excentriciteit van de aardbaan. De hoeksnelheid van de aarde in zijn baan rond de zon is niet constant, terwijl de rotatiesnelheid van



Figuure 1 **Analemma aan de hemel. Deze foto werd door A. Ayiomamitis gemaakt door herhaald te belichten op telkens dezelfde kloktijd, met de camera telkens in dezelfde positie. Aan de stand van het analemma kan men zien dat de foto's zijn genomen rond 15 uur.**

Figuur 2 **Een precisie-zonnewijzer gemaakt op de Calar Alto in Spanje. De schaduwwerpende 'knotsvormige' poolstijl maakt de correctie voor de tijdvereffening mogelijk. De vorm van de poolstijl is die van het analemma. De rechte schaduw wijst MET nauwkeurig aan. Conventionele zonnewijzers hebben een staafvormige poolstijl, en wijzen dus de zonnetijd aan.**

de aarde om zijn as wél constant is. Een tweede oorzaak is de scheve stand van de aardas. Hiertoe gebruiken wij een denkbeeldige hemelbol rondom de aardse waarnemer; zie figuur 3, ontleend aan [5]. Dat de aardbaan eigenlijk ellipsvormig is, speelt nu geen rol. Omdat het voor de projectie van de zon Z op de hemelequator niet uitmaakt of men van boven af projecteert (van lentepunt tot herfstpunt), of van beneden af (van herfstpunt tot lentepunt), heeft deze tijdvereffeningscomponent een halfjaarlijkse periode.

Excentriciteit

De aarde of beter het stelsel aarde-maan, doorloopt een ellipsvormige baan rond de zon met excentriciteit e=0,01671. De voerstraal r van de zon naar de aarde maakt een hoek λ, de baanhoek, met de lange as van de ellips. In het perihelium, dat is op de lange as (lengte $2a$) van de ellips, het dichtst bij de zon, nemen we $\lambda=0$; dit is rond 4 januari. De voerstraal, r, van de ellips laat zich beschrijven als:

$r=a\cdot(1-e^2)/(1+e\cdot\cos\lambda)$ (1)

Volgens de perkenwet van Kepler geldt dat in gelijke tijden de voerstraal een gelijk oppervlak A doorloopt, ofwel $dA/dt=(1/2)r^2 d\lambda/dt=k$. Zoals ook staat in het novembernummer is de perkenwet van Kepler een direct gevolg van de wet van impulsbehoud [6]. Samen met (1) geeft dit:

$t(\lambda)=(a^2/2k)\int_0^\lambda\{(1-e^2)^2/(1+e\cdot\cos\lambda)^2\}d\lambda$

Dankzij de geringe excentriciteit kan men bij de uitwerking van deze vergelijking termen in e^3 verwaarlozen. De bijdrage zou slechts circa 0,1 seconde zijn. Als we $t(\lambda=2\pi)=1$ (jaar) stellen, vinden we na enig rekenwerk en met de kleine waarde van e

$t(\lambda)=(1/2\pi)\cdot\{\lambda-2e\cdot\sin\lambda$
$+(3/4)e^2\cdot\sin(2\lambda)+....\}$ (3)

Het blijkt dat a en k uit de vergelijking wegvallen. Wie $t(\lambda)$ zelf wil narekenen kan vanaf (1) $e^2<<1$ stellen. Dit geeft makkelijk (3), zonder de term met e^2. Om de tijdvereffening op een tijdstip t te bepalen, hebben we echter $\lambda(t)$ nodig, maar (3) geeft ons alleen $t(\lambda)$. We moeten daarom λ iteratief berekenen uit (3), wat met een spreadsheet overigens eenvoudig is.

We introduceren vervolgens de eenparig bewegende 'middelbare aarde', met dezelfde periode als de ware aarde en met de baanhoek λ_M. De tijdvereffening is het gevolg van het verschil $\Delta\lambda$.

$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_M$ (4)

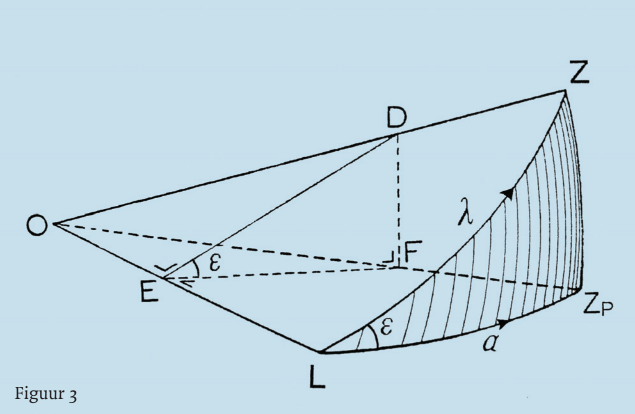
Dit verschil maakt dat de aarde nog over dit hoekje $\Delta\lambda$ vérder om zijn as moet draaien ten opzichte van de middelbare aarde, om de zon weer door de meridiaan te laten gaan, en dít is de tijdvereffening. Omdat de aarde met 4 minuten per graad om zijn as draait, is de tijdvereffening op het tijdstip t gelijk is aan – $4\cdot\Delta\lambda$ (minuten) met de hoek in graden. Het minteken geeft aan, dat de aarde na het perihelium ($\lambda=0$) weliswaar voor gaat lopen in zijn baan ten opzichte van de middelbare aarde, maar dat dit juist een vertráging in de meridiaandoorgang van de aarde geeft.

Uit vergelijking (3) volgt ook dat de tijdvereffening hier met goede benadering een sinusvormig verloop heeft als functie van de baanhoek, met een periode van één jaar.

Gevolg van de scheve aardas

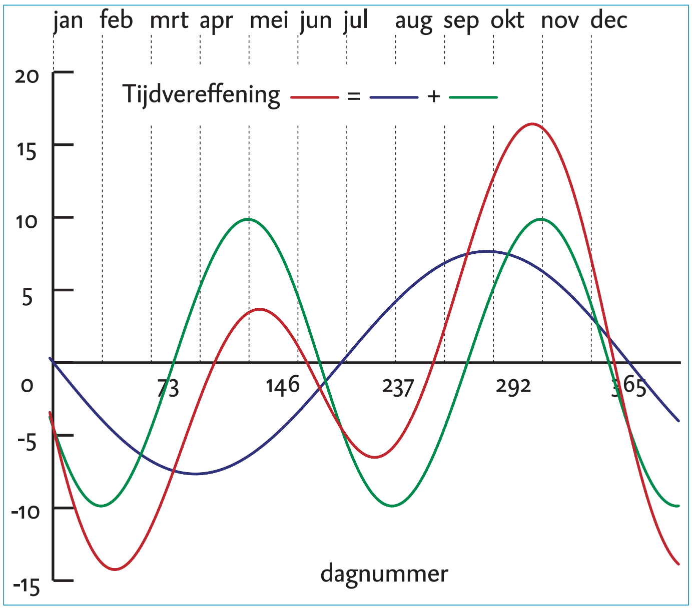
Als nulpunt voor λ nemen we nu niet het perihelium, maar het lentepunt, wanneer de zon door de equator gaat. Figuur 3 laat zien dat λ de hoek is die de ware zon heeft afgelegd gerekend vanaf het lentepunt L. De hoek α is de projectie van λ op de hemelequator LZ_P en déze hoek bepaalt de zonnetijd. Het kader onder figuur 3 maakt duidelijk dat

$\tan(\alpha)=\cos(\varepsilon)\cdot\tan(\lambda)$ (5)



Figuur 3

Omdat de aardas een hoek van $\varepsilon = 23{,}438°$ maakt met het baanvlak, staat ook de hemelequator (de doorsnijding van het aardequatorvlak met de hemelbol) onder dezelfde hoek met de ecliptica (de doorsnijding van het aardbaanvlak met de hemelbol). In de tekening bevindt de geocentrisch gedachte waarnemer zich in O, en kijkt naar het lentepunt L, daar waar de ecliptica de hemelequator in de lente snijdt. Een stukje hemel is gearceerd aangegeven. Per definitie is de middelbare zonnetijd gegeven door de projectie op de hemelequator van de positie van de zon langs de ecliptica. In de tekening is de zon in Z aangekomen, en de projectie hiervan is het punt Z_P.
De zon heeft een booglengte λ langs de ecliptica afgelegd. De afgelegde booglengte van de projectie hiervan is booglengte α. Met behulp van eenvoudige boldriehoeksmeting zijn nu alle lengtes en hoeken uit te rekenen. Door het punt E met hulplijnen naar D en F onder 90° met OL te kiezen kunnen alle bogen omgerekend worden in de driehoek ΔDEF met behulp van de bekende vlakke driehoeksmeetkunde.



Figuur 4 **De berekende tijdvereffening (rood) als de som van de twee oorzaken, ellipticiteit (blauw) en scheve aardas (groen). Het verschil met de 'exacte' tijdvereffening is niet zichtbaar op deze schaal.**

Jaar	Perihelium van de aarde (almanak)	Perihelium van het massamiddelpunt
2007	3 jan 21 u	3 jan 20 u
2008	3 jan 01 u	4 jan 03 u
2009	4 jan 16 u	3 jan 09 u

Tabel 1

Gebruiken we weer 4 minuten per graad, dan vinden we nu voor de tijdvereffening:

$$4\cdot(\lambda-\alpha)=4\cdot\{\lambda-\arctan(\cos(\varepsilon)\tan(\lambda))\} \text{ (minuten)} \qquad (6)$$

Vergelijking (6) is exact. Omdat ε relatief klein is, is dit bij benadering een sinus met periode een half jaar [9].
Om de twee tijdveffeningsoorzaken te combineren tot de totale tijdvereffening moet men eerst iteratief de baanhoek van het lentepunt bepalen ten opzichte van het perihelium. De datum van het lentepunt en van het perihelium vindt men in een almanak ([7] of [8]). Overigens: bij de excentriciteit was λ de baanhoek van de aarde om de zon, maar in figuur 3 is λ de schijnbare baanhoek van de zon om de aarde. Dit is natuurlijk het zelfde, slechts het gezichtspunt verschilt.

Totale tijdvereffening

Figuur 4 laat de tijdvereffening zien als de som van beide oorzaken. De hierboven besproken procedure leidt tot een fout van ongeveer 12 seconden. Vervolgens kunnen we de hierna te bespreken invloed van de maan meenemen; dan komen we aan maximaal 5 seconden fout in de loop van het jaar. Daarmee wordt het lonend de al besproken term met e^2 in rekening te brengen, wat ons op een maximale fout van 2 seconden brengt. Deze afwijkingen gelden ten opzichte van professionele tijdvereffeningstabellen.

Invloed van de maan

Men kan het begrip periheliumtijdstip verfijnen. Dit staat weliswaar voor elk jaar in een almanak, maar dat betreft slechts het tijdstip waarop de aarde zich het dichtst bij de zon bevindt. Door de invloed van de maan beschrijft de aarde geen zuivere ellipsbaan. Het massamiddelpunt van het stélsel aarde-maan beschrijft wél een ellipsbaan. Dit is daarom een beter criterium. Het staat niet in een almanak, maar het is af te leiden door ook rekening te houden met de schijngestalten van de maan. Deze afleiding, hoewel uitvoerbaar met elementaire wiskunde, zou hier te veel plaats innemen. We volstaan daarom met de waarden in tabel 1 (tijden in MET).

Conclusies

Tijdvereffening is een boeiend en verrassend effect, dat met elementaire rekenmethoden uitgerekend kan worden. Door de kleine excentriciteit van de aardbaan zijn benaderingsmethodes snel accuraat. Met meer complete berekeningen zijn astronomen in staat om de tijdvereffening tot 0,2 seconden nauwkeurigheid te bepalen.

396

Referenties

1 Teo Shin Yeow, National University of Singapore, www.math.nus.edu.sg/aslaksen/projects
2 Website van dr. R.H. van Gent: www.phys.uu.nl/~vgent/astro/ancientephemerides.htm
3 *NTvN*, mei 2006.
4 J.A.F. de Rijk, *Zonnewijzerkunde* (2003), ISBN 90-808407-1-8.
5 P. Wijdenes, *Boldriehoeksmeting*, Noordhoff (1950), blz. 16.
6 Heckman en Van Haandel, *NTvN* **73-11**, blz. 366.
7 *De Sterrengids*, stichting 'De Koepel', Utrecht.
8 http://aa.usno.navy.mil/data/docs/EarthSeasons.
9 $\tau = \lambda - \arctan(\cos\varepsilon \cdot \tan\lambda) \rightarrow$
$\tan(\lambda-\tau) = \cos\varepsilon \cdot \tan\lambda \rightarrow$
$\tan\lambda - \tau \cdot \cos^{-2}\lambda \approx \tan\lambda - (½)\,\varepsilon^2 \cdot \tan\lambda \rightarrow$
$\tau \approx (¼)\varepsilon^2 \cdot \sin(2\lambda)$